

# Değişken Malzemedeki Dönen Prizmatik Kirişin Enine Titreşimleri

Ahmet ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü,  
Yıldız, İstanbul- TÜRKİYE

Geliş Tarihi 04.04.2000

## Özet

Bu çalışmada değişken malzemeli, değişken kesitli, dönen prizmatik kirişin enine titreşimleri incelendi. Doğal frekanslar Rayleigh - Ritz yöntemi ile elde edildi. Bulunan değerler, sabit gerilmeli dönen prizmatik kirişin frekans değerleri ile karşılaştırıldı ve sonuçlar tablolar ile sunuldu.

**Anahtar Sözcükler:** Enine titreşim, Doğal frekans, Değişken malzeme, Dönen kiriş

## Transverse Vibrations of Rotating Prismatic Beams Produced by Variable-materials

### Abstract

In this study, transverse vibrations of rotating prismatic beams based on variable materials are investigated. Natural frequencies are obtained by the Rayleigh-Ritz method. These results are compared with frequency results of rotating prismatic beams with constant stress. Both sets of results are shown in tables.

**Key Words:** Transverse vibration, Natural frequency, Variable material, Rotating beam.

## Giriş

Bilindiği üzere volanlar, üzerlerinde biriktirdikleri enerji vasıtasıyla makinanın düzgün çalışmasını sağlayan önemli bir parçadır. Volanın bu özelliği birçok araştırmacıyı, üzerindeki enerjiyi maksimum düzeye çıkartacak optimum bir volan şekli bulmaya yöneltmiştir. Bu konu ile ilgili olarak birçok araştırmacı değişik varsayımlar ile çok sayıda çalışma yaptı. Bu amaca yönelik olarak izotrop davranan kompozit malzemedeki sabit gerilmeli bir volan Georgian (1989) tarafından teklif edilmiştir. Optimum dizaynli değişken malzemeli bir volan ise Metwalli, Shawki ve Sharobeam (1983) tarafından önerilmiştir.

Dönen makina elemanlarının görevlerini yerine getirebilmesi için dönme hızlarının emniyetli

sınırlar içerisinde olması gerekir. Parçaların oluşan santrifüj kuvvetlerin sebep olduğu gerilmelere dayanıklı olması yanında titreşim yönünden de çalışma şartlarına uygun olması gerekir. Malzeme içerisindeki küçük çatlaklar özellikle kritik frekanslarda ani bir büyüme göstererek parçaların kırılmasına sebep olmaktadır. Bu nedenle kritik frekansların belirlenmesi de önem arz etmektedir.

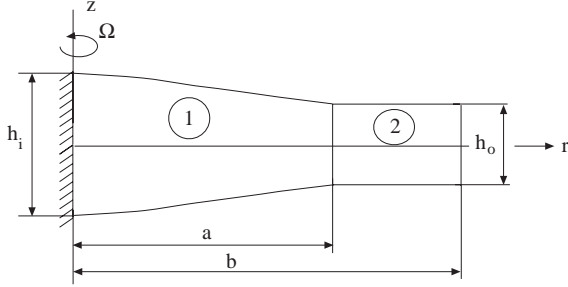
Georgian (1989) tarafından önerilen volanın boyutsuz doğal frekansları farklı malzemeler için Çelik (1998) tarafından hesaplanmıştır. Sabit gerilmeli volanda anizotropiğin titreşimler üzerindeki etkisi Güven, Parmaksızoğlu ve Çelik (1996) tarafından incelenmiştir. Optimum dizaynli değişken malzemeli volanın titreşimleri ile farklı kesit şekilleri ve malzeme özelliklerine sahip volanların titreşimleri

Çelik (1998) tarafından ele alınmıştır. Kirişlerde de eğilmeye göre optimum şekiller değişik kesitler için elde edilmiştir. Dönmeden dolayı oluşan gerilmelerin sabit kaldığı kirişe ait boyutsuz doğal frekanslar Yüksek ve Çelik (1999) tarafından hesaplanmıştır.

Mevcut çalışmada Al - Mg alaşımli olarak, değişik malzemeli seçilen kirişin malzemesi, alaşım içeriği yüzde olarak değişen tabakalar vasıtasıyla sağlanmıştır. Burada değişken yoğunluklu kiriş için Al - Mg alaşımı seçilmiştir. Kesit yüksekliğine ait fonksiyon ile tabakaların yerleştirileceği mesafeler, seçilen maksimum bir hızda tüm tabakaların aynı anda akma sınırına kadar zorlanacağı şekilde tayin

$$-\sigma_1(r)b_1h(r) + [\sigma_1(r) + d\sigma_1(r)][h(r) + dh(r)]b_1 + \rho_1(r)\Omega^2b_1h(r)rdr = 0 \quad (1)$$

ifadesi yazılır . İkinci ve daha yüksek mertebeden sonsuz küçük terimler ihmal edilerek ve



Şekil 1. Kiriş geometrisi

eşitliğin her iki tarafı  $h(r)\sigma_1(r)$ 'ye bölünerek,

$$\frac{dh(r)}{h(r)} + \frac{d\sigma_1(r)}{\sigma_1(r)} = -\frac{\rho_1(r)}{\sigma_1(r)}\Omega^2rdr \quad (2)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin integrasyonundan,

$$h(r)\sigma_1(r) = Cexp[-\Omega^2 \int \frac{\rho_1(r)}{\sigma_1(r)}rdr] \quad (3)$$

bulunur, burada C bir sabittir. Malzemenin yükseklik ve akma dayanımı için  $r = 0$ ' daki,  $h(r) = h_i$  ve  $\sigma_1(r) = \sigma_i$  sınır koşullarını (3)' de kullanarak yükseklik fonksiyonu ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h(r) = h_i \frac{\sigma_i}{\sigma_1(r)} exp[-\Omega^2 \int \frac{\rho_1(r)}{\sigma_1(r)}rdr] \quad (4)$$

Burada, Metwalli, Shawki ve Sharobeam (1983) tarafından yapılan çözüm yolu izlenerek aşağıdaki gibi bir

$$F(x) = exp[-\frac{\Omega^2}{2} \int \frac{\rho_1(x)}{\sigma_1(x)}dx] \quad (5)$$

fonksiyonu tanımlanacaktır. Bu ifadede  $x = r^2$  olarak alınmıştır. Çözüm için ele alınan F(x)

edilmiştir. En dıştaki sınır şartının sağlanması için değişken kesitli bölgenin ucuna sabit kesitli bir parça eklenmiştir. Bu parçanın malzemesi olarak değişken kesitin en dış tabakasında yer alan alaşım seçilmiştir.

## Temel Bağlımlar

### Değişken malzemeden dönen prizmatik kirişin enine titreşimleri

Şekil 1' de gösterilen kirişin başlangıç noktasından r uzaklığında dr uzunluğundaki birim parçası üzerine etki eden kuvvetlerin dengesinden,

fonksiyonu ile ilgili özellikler, Metwalli, Shawki ve Sharobeam (1983) tarafından ayrıntılı olarak verilmiştir. (5)' deki ifade yardımı ile

$$\frac{\rho_1(x)}{\sigma_1(x)} = -\frac{2}{\Omega^2} \frac{F'(x)}{F(x)} \quad (6)$$

bulunur,  $F'(x)$ ; F(x) fonksiyonunun türevidir. F(x), Metwalli, Shawki ve Sharobeam (1983) tarafından önerildiği gibi

$$F(x) = 1 - a_i r^2 \quad (7)$$

olarak alınmıştır. Bu fonksiyon ile türevi (6)' da yazıldığında,

$$\frac{\rho_1(r)}{\sigma_1(r)} = \frac{2}{\Omega^2} \frac{a_i}{1 - a_i r^2} \quad (8)$$

elde edilir ve kirişin ankastre olarak bağlandığı merkezden genel haldeki radyal uzaklık ifadesi,

$$r = \left[ \frac{1 - \frac{a_i}{\frac{\rho_1(r)}{\sigma_1(r)} \Omega^2}}{a_i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

şeklinde elde edilir.

Buna göre dönen kiriş için (7), (4)' de yazılarak yükseklik fonksiyonu yeniden ifade edilirse,

$$h(r) = h_i \frac{\sigma_i}{\sigma_1(r)} (1 - a_i r^2) \quad (10)$$

olur.

Dönen kirişin değişken kesitli bölgesinin her yerinde akma dayanımına eşit bir gerilme dağılımı elde etmek için gerekli Mg alaşım elemanı dağılımı Metwalli, Shawki ve Sharobeam (1983) tarafından yapılan kabule göre aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\%Mg = 1 + d_1 x + d_2 x^2 \quad (11)$$

burada  $d_1$  ve  $d_2$  alaşım oranı ve dönme hızına göre belirlenecek sabit katsayılardır.

Gerilme dağılımı için ise benzer şekilde aşağıdaki kabul yapılır:

$$\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_1} = 1 + d_3x + d_4x^2 \quad (12)$$

burada  $d_3$  ve  $d_4$ ,  $d_1$  ve  $d_2$  gibi belirlenmesi gereken sabit katsayılardır.

### Sabit kesitli bölgeye ait bağıntılar

Uç kısma ilave edilen sabit kesitli bölgenin dr uzunluğundaki sonsuz küçük parçasına etki eden kuvvetlerin dengesinden ve  $r = b$  de  $\sigma_2 = 0$  sınır şartından,

$$\sigma_2 = \frac{\rho_2 \Omega^2 b^2}{2} [1 - (\frac{r}{b})^2] \quad (13)$$

elde edilir.

$r = a'$  da radyal gerilmelerin eşitliği koşulu kul-

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^a E_1 I_1(r) (\frac{\partial^2 W}{\partial r^2})^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^a (\frac{\partial W}{\partial r})^2 \sigma_1(r) A_1(r) dr + \frac{1}{2} \int_a^b E_2 I_2 (\frac{\partial^2 W}{\partial r^2})^2 dr + \frac{1}{2} \int_a^b (\frac{\partial W}{\partial r})^2 \sigma_2 A_2 dr \quad (16)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega_n^2 \int_0^a \rho_1(r) W^2 A_1(r) dr + \frac{1}{2} \rho_2 \omega_n^2 \int_a^b W^2 A_2 dr \quad (17)$$

### Rayleigh - Ritz Tekniği

Bu çalışmada içten ankastre dıştan serbest bağlantılı olarak dönen kiriş problemi incelenecektir. Enerji ifadelerinde yer alan  $W(r)$  ifadesi, sınır koşullarını sağlayacak şekilde aşağıdaki gibi seçilir.

$$W(r) = a_0 r^2 + a_1 r^3 + a_2 r^4 + a_3 r^5 + a_4 r^6 + a_5 r^7 \dots \quad (18)$$

şeklinde kabul edilmiş olup hesaplamalarda ilk altı terim dikkate alınmıştır. Rayleigh - Ritz tekniğinde enerji ifadeleri kullanılarak çözüm yapıldığında aşağıdaki matris formuna göre yazılır ve özdeğer problemin doğal frekansları bulunur:

$$([A] - \omega_n^2 [B]) \{ a_0 \ a_1 \ \dots \}^T = 0 \quad (19)$$

Sayısal örnek için, devir sayısı  $n = 5000d/d$  ( $523,598rad/s$ ) olarak alınmıştır. Kirişin bir tarafı ankastre bağlı diğer tarafı serbesttir (Şekil 1). Bağlantı yerindeki tabaka malzemesi  $o/o10$  Mg ve değişken yoğunluklu bölgenin sonundaki tabaka ise  $o/o3,75$  Mg içermektedir. Sabit kesitli uç kısmın malzemesi ise  $\% 3,75$  Mg' ludur. Karşılaştırma için kullanılan sabit gerilmeli kirişin değişken kesit bölgesi  $\%10$  Mg' lu, sabit kesitli bölgesi  $\% 3,75$

lanılarak,

$$b = [\frac{2\sigma_a}{\rho_2 \Omega^2} + a^2]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

olarak belirlenir, burada  $\sigma_a$ , kirişin  $r = a$  uzaklığındaki tabakasındaki yer alan alaşım elemanının akma dayanımıdır. Böylece kirişin dönme merkezinden en dış noktasına olan uzaklığına ait eşitlik elde edilir.

### Enerji ifadeleri

Titreşimlerin hesaplanmasında kabul edilen yer değiştirme fonksiyonu,

$$w = W(r) \cos \omega_n t \quad (15)$$

olarak seçilir. Maksimum potansiyel enerji ifadeleri ve kinetik enerji ifadeleri ise sırası ile aşağıdaki gibi yazılır.

Mg'lu Al-Mg alaşımındandır. Kullanılan alaşımın bazı %Mg değerleri için en yüksek akma dayanım değerleri, yoğunluk ve yoğunluk / gerilme değerleri aşağıda görülen Tablo 1' de verilmiştir.

**Tablo 1.** Al - Mg alaşımının mekanik özellikleri

Mg	$\sigma$ Mpa	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho/\sigma$ m <sup>-2</sup> s <sup>2</sup>
%10	170,1	2550	1,53.10 <sup>-5</sup>
%6	102	2600	2,6.10 <sup>-5</sup>
%3,75	81,6	2630	3,29.10 <sup>-5</sup>

Değişken yoğunluklu kiriş için,

$$a_i = 2,09729m^{-2}, \quad a = 0,505m(\%3,75Mg),$$

$$r = 0,443m(\%6Mg), \quad b = 0,6938m$$

$$d_3 = -2,03969, \quad d_4 = -1,6667.10^{-3}$$

$$h(a)/h_i = 0,9696, \quad a/b = 0,7278$$

Değişken yoğunluklu kirişteki gibi, değişken kesit bölgesi aynı uzunlukta, bağlantı yerindeki yüksekliği

aynı olan ve aynı hızda dönen, sabit gerilmeli kiriş için,

$$a/b = 0,5923, \quad b = 0,8526m,$$

$$h(a)/h_i = 0,5240$$

değerlerini almaktadır.

### Sonuçlar

Bu çalışmada hareket denklemi elde edilirken

santrifüj kuvvet dışındaki etkiler ihmal edilmiş ve değişken yoğunluklu bölgede elastiklik modülünün fazla bir değişime uğramadığı kabul edilmiştir. Verilen özelliklere sahip kirişlerin doğal frekansları incelendiğinde değişken yoğunluklu kirişin doğal frekansları, sabit gerilmeli kirişin doğal frekanslarına göre, gerek dönmenin sıfır olduğu gerekse sıfırdan farklı olduğu hallerde tüm modlar için artış göstermektedir.

**Tablo 2.** Sabit Gerilmeli Kirişin Doğal Frekansları ( rad / s )  
 $E_1 = E_2 = 72GPa, \rho_1 = 2550kg/m^3, \rho_2 = 2630kg/m^3, a/b = 0,5923$

$n(d/d)$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
0	200,1024	900,7087	2477,7	4959,6	9943,1	30854
5000	605,1954	1575,200	3191,2	5672,9	10562,0	31090

**Tablo 3.** Değişken Yoğunluklu Kirişin Doğal Frekansları ( rad / s )  
 $E_1 = E_2 = 72GPa, \rho_i = 2550kg/m^3, \rho_b = 2630kg/m^3, a/b = 0,7278$

$n(d/d)$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
0	281,9400	1739,00	4839,90	10063	17494	77344
5000	629,9900	2186,7	5314,0	10507,9	17924	77446

### Sembol Listesi

$a$	Kirişin değişken kesitli bölgesinin uzunluğu
$a_i$	F(x)kiriş fonksiyonunun katsayısı
$a_0, a_1, \dots, a_5$	Kabul edilen yer değiştirme fonksiyonunun sabit katsayıları
$A_1(r)$	Değişken kesitli bölgenin enine kesit alanı
$A_2$	Kirişin sabit kesitli bölgesinin enine kesit alanı
$b$	Kiriş boyu
$b_1$	Kirişin genişliği
$d_1, d_2$	Mg dağılımına ait ifadenin katsayıları
$d_3, d_4$	Gerilme dağılımına ait ifadenin katsayıları
$E_1$	Kirişin değişken kesitli bölgenin malzemesine ait elastiklik modülü
$E_2$	Kirişin sabit kesitli bölgesinin malzemesine ait elastiklik modülü
$F(x)$	Kiriş fonksiyonu
$F'(x)$	Kiriş fonksiyonunun türevi
$h_0$	Kirişin sabit kesitli parçasının yüksekliği
$h_i$	Kirişin bağlantı yerindeki yüksekliği

$h(r)$	Kirişin değişken kesitli parçasının r uzaklığındaki yüksekliği
$I_1(r)$	Kirişin değişken kesitli parçasının r uzaklığındaki kesitinin atalet momenti
$I_2$	Sabit kesitli parçanın tarafsız eksene göre atalet momenti
$\omega_n$	Doğal frekans
$\Omega$	Kirişin açısal hızı
$\rho_i$	Kirişin bağlantı yerindeki tabakanın alaşım elemanına ait yoğunluk
$\rho_1(r)$	Herhangi bir r uzaklığında yer alan bir tabakanın alaşım elemanının yoğunluğu
$\rho_2$	Sabit kesitli parçanın malzemesinin yoğunluğu
$\sigma_a$	Başlangıçtan a uzaklığında yer alan tabakanın alaşım elemanının akma dayanımı
$\sigma_i$	Kirişin bağlantı yerindeki tabakanın alaşım elemanına ait akma dayanımı
$\sigma_1(r)$	r uzaklığındaki tabakaya ait alaşım elemanının akma dayanımı
$\sigma_2$	Sabit kesitli bölgenin malzemesine ait akma dayanımı

$t$	zaman	$V_{max}$	Kiriş e ait maksimum potansiyel enerji
$T_{max}$	Kiriş e ait maksimum kinetik enerji	$W$	Sınır şartlarını sağlayan yer değiştirme fonksiyonu

### Kaynaklar

Çelik, A., "On Transverse Vibration of Flywheel with Optimum Design", PhD Thesis, İstanbul, 1998.

Georgian, J. C., "Optimum Design of Variable Composite Flywheel", Journal of Composite Materials, 23, 2-10, 1989.

Güven, U., Parmaksızoğlu, C. and Çelik, A., "On Transverse Vibration of a Variable Composite Flywheel with Optimum Design", Z. Angev. Math. Mech., 76, 537- 538, 1996.

Metwalli, S. M., Shawki, G. S. A. and Sharobeam, M. H., "Optimum Design of Variable - Material Flywheels" ASME; Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 105, 249 - 253, 1983.

Yüksek, İ. and Çelik, A., "Transverse Vibration of a Beam Under Constant Stress", Tr. J. of Engineering and Environmental Science, 23, 1-6, 1999.